Fonction logarithme népérien –fonction exponentielle

Définition

La fonction logarithme Népérien , notée **ln** est la primitive qui s'annule en 1.

de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$

Conséquences :

- La fonction ln est continue , dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- $\ln(x)<0$, si et seulement si , $x \in]0,1[$.
- $\ln(x)>0$, si et seulement si , $x>1$.
- Pour tous réels strictement positifs a et b :
  $\ln(a)<\ln(b)$, si et seulement si , $a<b$ et $\ln(a)=\ln(b)$, si et seulement si , $a=b$.

Propriétés

Pour tous réels strictement positifs a et b on a :

- $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.
- $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$ où $n \in \mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}.\ln a$
- **Limites usuelles**

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$:
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^n}{x^p}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p(\ln(x))^n=0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$:
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^n}{x^p}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p(\ln(x))^n=0$.

© najah.com®

Fonctions : $x \to \ln(u(x))$ et $x \to \ln|u(x)|$

- Si u est dérivable, strictement positive sur un intervalle J

  Alors ln(u) est dérivable sur J et $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$

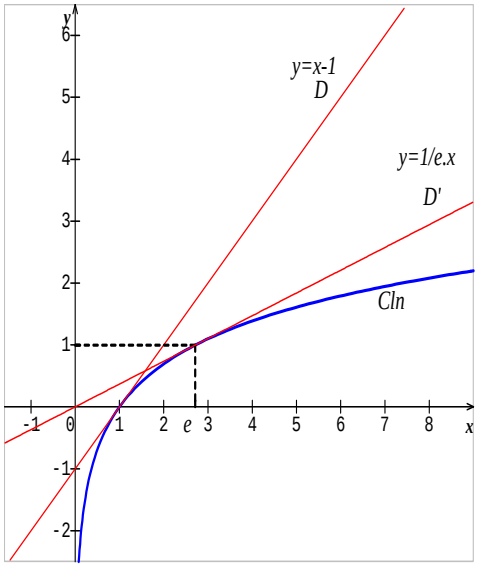
- Si u est dérivable, strictement négative sur un intervalle J

  Alors $\ln(|u|)$ est dérivable sur J et $[\ln(|u|)]' = \frac{u'}{u}$

- La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $]0,+\infty[$

La Courbe représentative de la fonction ln admet

- une asymptote verticale (x=0).
- une branche parabolique de direction (Ox).
- la droite D : y = x – 1 comme tangente au point d'abscisse 1.
- la droite D': $y = \frac{1}{e}x$ comme tangente au point d'abscisse e.



La fonction ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Définition :

On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$x \mapsto \exp(x) = e^x$

Conséquences :

- La fonction exponentielle est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $e^a = b$ et $a \in \mathbb{R}$, si et seulement si, ln(b)= a et b>0.
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = e^x$.

Propriétés :

- Pour tous les réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \; ; \; e^{-a} = \frac{1}{e^a} \; ; \; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

- Pour tout réel a et tout entier n on a : $(e^a)^n = e^{na}$.

Limites usuelles :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

© najah.com®

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.
- Pour tous les entiers naturels non nuls n et p on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^p e^{nx}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{nx}}{x^p}=+\infty$.
- Pour tout rationnel r >0 on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^r}=+\infty$.

Théorème

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $g: x\mapsto e^{f(x)}$ est dérivable sur I et on a : pour tout $x\in I$: $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$.

Conséquence :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors une primitive sur I de la fonction $x\mapsto f'(x)e^{f(x)}$ est : $x\mapsto e^{f(x)}$.

Fonction exponentielle en base a :

Soit a>0. On appelle fonction exponentielle en base a, la fonction :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto a^x=e^{x\ln a}$$

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x)=(\ln a)a^x$.

Si 0<a<1 alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$

Si a>1 alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

Fonctions puissances

- On appelle puissance r, où $r\in\mathbb{R}$, la fonction : $h:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^r=e^{r\ln(x)}$.
- La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $h'(x)=rx^{r-1}$.
- Une primitive sur $]0,+\infty[$ de h est la fonction : $x\mapsto\dfrac{1}{r+1}x^{r+1}$
- Si r>0 alors $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^r=0$
- Si 0<r<0 alors $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^r=+\infty$

© najah.com®